

תורת ההסתברות

פרק 45 - התפלגות מולטינומית (פרק 6 ממ"ן 13)

תוכן העניינים

1. כללי 1

התפלגות מולטינומית:

רקע:

ההתפלגות המולטינומית היא התפלגות רב-ממדית, המציינת את תוצאות סדרה של n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי r תוצאות אפשריות עם סדרת הסתברויות

$$\text{הצלחה: } (p_1, p_2, \dots, p_r) \text{ כאשר מתקיים ש: } \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

עבור: $i = 1, 2, \dots, r$, הרכיבו Y_i של המשתנה המולטינומי מציין את מספר הפעמים

$$\text{בהן נתקבלה התוצאה ה-} i, \text{ כאשר: } \sum_{i=1}^r Y_i = n.$$

בצורה כללית ניתן לרשום את ההתפלגות המולטינומית באופן הבא:

$$Y \sim \text{multi}(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$$

פונקציית ההסתברות המשותפת הרב מימדית היא:

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_r = y_r) = \binom{n}{y_1, y_2, \dots, y_r} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r} = \frac{n!}{y_1! \cdot y_2! \cdot \dots \cdot y_r!} p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r}$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

להלן תוצאות ההצבעה לעיר "מטושן":

המועמד	% מצביעים
טד סול	62%
בוב שפירו	12%
דורית מון	26%

נבחרו באקראי, ועם החזרה, 8 מצביעים מהעיר מטושן.

א. מה ההסתברות ש-4 מהם יצביעו עבור טד סול, 1 עבור בוב שפירו והיתר עבור דורית מון?

ב. רשמו את פונקציית ההסתברות המשותפת של מספר מצביעים במדגם לכל מתמודד.

שאלות:

- (1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. נשלפו באקראי ועם החזרה בין כדור לכדור 12 כדורים. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. 3 כדורים יהיו ירוקים ו-5 כדורים יהיו כחולים.
- ב. 3 כדורים יהיו ירוקים.
- ג. אם נתון שהוצאו 3 כדורים ירוקים, מה הסיכוי שהוצאו 5 כחולים?

- (2) נטיל קובייה הוגנת 10 פעמים.
- א. מה הסיכוי לקבל פעם אחת את התוצאה 1, פעמיים את התוצאה 2 ושלוש פעמים את התוצאה 3?
- ב. מצאו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שתקבל התוצאה 1?

- (3) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי כאשר:
- $$p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2, n = 20$$
- X_i הוא מספר הניסויים שבהם התקבלה התוצאה i כאשר: $i = 1, 2, 3$.
- א. כיצד X_2 מתפלג?
- ב. כיצד $X_2 + X_3$ מתפלג?
- ג. האם X_1 ו- X_2 הינם משתנים בלתי תלויים?
- ד. כיצד $X_2 | X_1 = 5$ מתפלג?

- (4) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי.
- א. יש להוכיח שלכל $i \neq j$ מתקיים ש: $COV(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j$.
- ב. מהו מקדם המתאם בין X_i, X_j ? בטאו התשובה באמצעות n, p_i, p_j .

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0581 ב. 0.2362 ג. 0.246
- (2) א. 0.0169 ב. תוחלת: $\frac{5}{3}$, שונות: $\frac{25}{18}$
- (3) א. בינומי עם $n = 20$, $p = 0.3$ ב. בינומי עם $n = 20$, $p = 0.5$
- ג. לא. ד. בינומי עם $n = 20$, $p = 0.6$
- (4) א. הוכחה. ב. $-\sqrt{\frac{p_i \cdot p_j}{(1-p_i) \cdot (1-p_j)}}$